TENZORY

$V \ldots$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $\dim V = n$

ozn. V_n

$\omega : V_n \to \mathbb{R}$ lineární zobrazení

$a, b \in V_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\omega(a+b) = \omega(a) + \omega(b)$

$\omega(\alpha a) = \alpha \cdot \omega(a)$

se nazývá LINEÁRNÍ FORMA na vekt. prostoru V_n.

Buď $(e_1, \ldots, e_n)$ báze V_n.

$\omega(e_i) := \omega_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

ω_i jsou SLOŽKY LIN. FORMY ω vzhledem k bázi $(e_1, \ldots, e_n)$.

Na množině všech lin. forem na vekt. prostoru V_n definujeme operace

$(\omega + \eta)(a) = \omega(a) + \eta(a)$

$(\alpha \omega)(a) = \alpha \cdot \omega(a)$

$\forall a \in V_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Tento vektorový prostor označujeme V_n^* a nazývá se DUÁLNÍ PROSTOR k V_n.

$(e_1, \ldots, e_n)$ báze V_n.

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{(Kroneckerovo delta)}$$

$i, j \in \{1, \ldots, n\}$. $\quad e^i \in V_n^*$

$(e^1, \ldots, e^n)$ je báze V_n^* a nazývá se DUÁLNÍ BÁZE k bázi $(e_1, \ldots, e_n)$. Tzn., že $\dim V_n^* = n$.

Prostor V_n^* se také značí $\mathcal{T}^1_0(V_n)$ a nazývá se PROSTOR KOVARIANTNÍCH TENZORŮ PRVNÍHO ŘÁDU na V_n.

Prostor V_n se také značí $\mathcal{T}^0_1(V_n)$ a nazývá se PROSTOR KONTRAVARIANTNÍCH TENZORŮ PRVNÍHO ŘÁDU na V_n.

TENZOROVÝ SOUČIN VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

V_n, V_m vektorové prostory nad $\mathbb{R}$

Množinu všech lin. zobrazení z V_n^* do V_m označujeme $L(V_n^*, V_m)$, má strukturu vektorového prostoru. Tento prostor se nazývá TENZOROVÝ SOUČIN prostorů V_n, V_m. Označuje se $V_n \otimes V_m$.

Buď $(e_1, \dots, e_n)$ báze V_n, $(f_1, \dots, f_m)$ báze V_m. Definujme

$$\Phi_{lr} : V_n^* \to V_m$$

$$\Phi_{lr}(e^k) = f_r \delta_l^k \qquad \begin{matrix} l, k \in \{1, \dots, n\} \\ r \in \{1, \dots, m\} \end{matrix}$$

Zobrazení Φ_{lr} tvoří bázi $V_n \otimes V_m$.

$\dim V_n \otimes V_m = n \cdot m$.

$\Phi_{lr} := e_l \otimes f_r$ a nazývá se TENZOROVÝ SOUČIN vektorů e_l a f_r.

Při $V_n = V_m \Rightarrow V_n \otimes V_n = L(V_n^*, V_n)$, $\dim = n^2$

$V_n \otimes V_n := \mathcal{T}_2^0(V_n)$ a nazývá se

PROSTOR KONTRAVARIANTNÍCH TENZORŮ 2. ŘÁDU na V_n.

$V_n^* \otimes V_n^* = L(V_n, V_n^*) := \mathcal{T}_0^2(V_n)$ a

nazývá se PROSTOR KOVARIANTNÍCH TENZORŮ 2. ŘÁDU na V_n.

$V_n^* \otimes V_n = L(V_n, V_n)$, $V_n \otimes V_n^* = L(V_n^*, V_n^*)$

značí se $\mathcal{T}_1^1(V_n)$ a nazýváme je

PROSTOR SMÍŠENÝCH TENZORŮ 2. ŘÁDU na V_n.

OTÁZKY KE ZKOUŠCE

1. Vektorové prostory (vekt. prostor, vektor, skalár, lin. kombinace vektorů, generátory vekt. prostoru)
2. Vektorové prostory (lineární závislost, báze, souřadnice vektoru, matice přechodu).
3. Vektorové podprostory
4. Lineární zobrazení
5. Matice lineárního zobrazení
6. Vlastní vektory
7. První rozklad lin. transformace
8. Druhý rozklad lin. transformace
9. Skalární součin (definice, příklady, délka vektoru, nerovnosti)
10. Sk. součin (odchylka vektorů, ortogonalita, Gramm-Schmidtova ortogonalisace, ortogonální doplněk, ortogonální projekce)
11. Sk. součin (shodnosti a unitární transformace)
12. Bilin. a kv. formy (bilin. formy, kongruentnost matic, symetrické bilin. formy, kv. formy)
13. Bilin. a kv. formy (kanonické tvary, kladně definitní formy a matice)
14. Tenzory.